非線形音波の正則摂動展開による解と遠方場の方程式(Navier-Stokes方程式の解の動的構造)

矢野, 猛; 井上, 良紀

数理解析研究所講究録
677巻 1989年 99-117

非線形音波の正則摂動展開による解と遠方場の方程式

北大工　矢野　猛（Takeru Yano）
北大工　井上良紀（Yoshinori Inoue）

1. はじめに

球の一様な脈動や剛体球の振動によって発生する音波の非線形現象は、既に第二近似解まで調べられており、衝撃波の発生位置に関する定量的な解析も行なわれている[1][2][3]。それらによると、音源となる球の基準半径が放射される音波の波長と同程度である問題に限定すれば、音場を以下のような二つの領域に大別することができる：(i)近傍場；音源からの距離が波長程度である領域。そこでは、音波はおおよそ線形の波のように振舞う。(ii)遠方場；音源からの距離が波長に比べて十分に大きい領域。そこでは、音波の伝播に伴って累積した非線形効果のため、波形は歪み、衝撃波が発生する。これに対して、球の基準半径が波長に比べて十分に小さい場合は、近傍場のさらに内側に非圧縮流のように振舞う薄い内部領域が現われる。

球の半径と波長が同程度である場合は、諸量をマッハ数等の小さいパラメータの巾級数に展開（正則摂動展開）するこ

とによって、音源表面での境界条件を満たす近似解を構成することができる（近傍場の解）。しかし、正則摂動展開による解は、高次近似に無限遠で発散する永年項を含むため、遠方場では有効でない。遠方場で有効な近似解（遠方場の解）を得るためには、特異摂動法[4]や、遠方場での音波の振舞いを支配する非線形の双曲型方程式（遠方場の方程式）

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial w}{\partial z} - w\frac{\partial w}{\partial \varphi} = 0, \\ &w = \frac{r}{R}u_r, \quad z = \frac{\gamma+1}{2}R\ln\frac{r}{R}, \quad \varphi = t - r, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

が用いられる[1][2][3]。ここに、u_rは速度の動径方向成分、tは時間、rは音源からの距離で、それぞれ、基準速度、基準時間及び基準長で無次元化されている（2.2節参照）。Rは（2)式（2.1節）で定義される無次元化された音源の基準半径である。また、γは、媒質に依存して決まる物質定数で、理想気体の場合には比熱比である。

遠方場の方程式(1)は、古くから知られていたにもかかわらず[5][6]、近傍場の解との関係は明らかにされてはいなかった。最近、Inoue et al.[1]は、一様に脈動する球の問題の第一近似解に対して、その密接なつながりを示した。本研究では、[1]で用いられた方法をさらに発展させることにより、正則摂動展開による解と遠方場の方程式の関係を解明し、衝撃波の発生位置までの遠方場の構造について考察を行なう。

この解析の結果、遠方場の方程式に対する適切な境界条件が明らかになり、さらに、この境界条件の下で求められた遠方場の方程式の厳密解が、球の運動により放射される音波の遠方場での振舞いを正しく記述していることが示される。

2. 問題

球の脈動あるいは剛体球の振動によってそれを取り囲む無限媒質中に放射される音波の伝播に伴う非線形現象を考察し、正則摂動展開による解と遠方場の方程式の関係を解明する。

本研究では、特に、以下のような球の運動によって放射される音波を考察の対象とする：(i) 基準半径R_0の単一の球が、最大振幅αR_0、角振動数ωで、空間的に一様あるいは非一様な正弦的脈動を行なう。(ii) 半径R_0の単一の剛体球が、振幅αR_0、角振動数ωで、正弦的並進振動を行なう。

具体的な球の運動を指定しない一般的な定式化を行ない、上述の二つの場合を一つにまとめて解析する。

2.1 仮定

以下の仮定の下に解析を行なう。

(i) 弱非線形問題を考える。すなわち、音源の代表速度U($=\alpha R_0\omega$)の静止流体中の音速c_0に対する比ε(マッハ数)

は 1に比べて十分に小さい: $\varepsilon \equiv U/c_0 \ll 1.$

(ii) 媒質は、非粘性・非熱伝導性の流体であり、無限遠で静止している。

(iii) 音源の基準半径R_0は放射される音波の波長λ($\sim c_0/\omega$)と同程度である。

(i)と(iii)から、

$$R \equiv R_0\omega/c_0 \sim 1, \tag{2}$$

で定義される無次元化された球の基準半径Rとε,αの間に次の関係が成り立つことがわかる:

$$\varepsilon = \alpha R, \tag{3}$$

ここで、αは球の基準半径R_0に対する最大振幅の比を表わす無次元パラメータであり、$R\sim 1$より、$\alpha \ll 1$となる。

2.2 基礎方程式

球の中心の平衡位置を原点とする球座標($\bar{r},\theta,\psi$)を用いて問題を定式化する。

基準速度、基準時間及び基準長をそれぞれ、$c_0, 1/\omega, c_0/\omega$とする。これらを用いて以下のように無次元化を行なう。

$$\phi = \bar{\phi}\omega/c_0^2, \quad t = \bar{t}\omega, \quad r = \bar{r}\omega/c_0, \tag{4}$$

ここで、$\bar{}$ のついた量は次元を持った量で、$\bar{\phi}$は速度ポテンシャル、$\bar{t}$は時間である。

ϕを支配する単一の方程式が、連続の式、運動量の式及び等エントロピー関係式から次のように導かれる。

$$\Delta\phi - \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = (\gamma-1)\frac{\partial\phi}{\partial t}\Delta\phi + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\phi)^2 + \frac{\gamma-1}{2}(\nabla\phi)^2\Delta\phi + \frac{1}{2}(\nabla\phi\cdot\nabla)(\nabla\phi)^2, \tag{5}$$

ここで、

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\psi^2}\right], \tag{6}$$

である。γは、媒質の種類によって定まる定数である[7]。媒質が理想気体の場合にはγは比熱比である。

無次元化された流速は、速度ポテンシャルϕを用いて

$$u_r = \frac{\partial\phi}{\partial r}, \qquad u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}, \qquad u_\psi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\psi}, \tag{7}$$

で与えられる。

2.3 境界条件

音源の表面では、境界を通して流れが無いという条件が満たされなければならない。すなわち、

$$s(r,\theta,\psi,t) = 0, \tag{8}$$

で定められる境界上の点で、

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \nabla\phi\cdot\nabla s = 0. \tag{9}$$

本研究では、球の確定した運動形態、すなわち s の具体的な関数形、を指定せずに議論を行なう。また、ϕは無限遠で放射条件を満たすとする。

3. 正則摂動展開と近傍場の解

ϕ を次のような ε の巾級数（正則摂動展開）の形で求める。

$$\phi=\varepsilon\phi_1+\varepsilon^2\phi_2+\cdots. \tag{10}$$

正則摂動展開(10)を基礎方程式(5)に代入し、ε の等巾の項をまとめて0とおくことにより、$\phi_n(n=1,2,\cdots)$ を決定する方程式系を得る：

$$O(\varepsilon):\ \Delta\phi_1-\frac{\partial^2\phi_1}{\partial t^2}=0, \tag{11.a}$$

$$O(\varepsilon^2):\ \Delta\phi_2-\frac{\partial^2\phi_2}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\phi_1}{\partial\theta}\right)^2+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial\psi}\right)^2+\frac{\gamma-1}{2}\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial t}\right)^2\right], \tag{11.b}$$

$$\vdots$$

$$O(\varepsilon^n):\ \Delta\phi_n-\frac{\partial^2\phi_n}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\sum_{m=1}^{n-1}\left[\frac{\partial\phi_m}{\partial r}\frac{\partial\phi_{n-m}}{\partial r}+\frac{\gamma-1}{2}\frac{\partial\phi_m}{\partial t}\frac{\partial\phi_{n-m}}{\partial t}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial\phi_m}{\partial\theta}\frac{\partial\phi_{n-m}}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial\phi_m}{\partial\psi}\frac{\partial\phi_{n-m}}{\partial\psi}\right]+(\phi_k\text{の3次からなる項}), \tag{11.c}$$

$$\vdots$$

次に境界条件を考える。$\varepsilon=\alpha R$ という関係(3)を用いると、s を次のような ε の巾級数のかたちで表わすことができる。

$$s(r,\theta,\psi,t)\equiv r-R-\varepsilon s_1(\theta,\psi,t)-\varepsilon^2 s_2(\theta,\psi,t)-\cdots, \tag{12}$$

ここで、$s_n(n=1,2,\cdots)$ は球の運動を指定することによって決定される[1]-[4]。 さらに、(12)を用いると、境界上の諸量、例えば $\partial\phi_n/\partial r|_{s=0}$ を、$r=R$ のまわりのTaylor展開で表わすことができる：

$$\left.\frac{\partial\phi_n}{\partial r}\right|_{s=0}=\left.\frac{\partial\phi_n}{\partial r}\right|_{r=R}+\varepsilon s_1\left.\frac{\partial^2\phi_n}{\partial r^2}\right|_{r=R}+\cdots. \tag{13}$$

$(1/r)\partial\phi_n/\partial\theta|_{s=0}$, $(1/r\sin\theta)\partial\phi_n/\partial\psi|_{s=0}$ なども(13)と同様に

Taylor展開で表わし、それらを(12)とともに(9)に代入し、εの等巾の項をまとめて0とおくことによって、r=R における各ϕ_n(n=1,2,・・・)に対する境界条件を得る:

$$O(\varepsilon):\ \frac{\partial \phi_1}{\partial r}\Big|_{r=R} = \frac{\partial s_1}{\partial t}, \tag{14.a}$$

$$O(\varepsilon^2):\ \frac{\partial \phi_2}{\partial r}\Big|_{r=R} = \frac{\partial s_2}{\partial t} - s_1\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial r^2}\Big|_{r=R} - \frac{1}{R^2}\frac{\partial s_1}{\partial \theta}\frac{\partial \phi_1}{\partial \theta}\Big|_{r=R} - \frac{1}{R^2 \sin^2\theta}\frac{\partial s_1}{\partial \psi}\frac{\partial \phi_1}{\partial \psi}\Big|_{r=R}, \tag{14.b}$$

$$\vdots$$

よって、ϕ_nは、前述の方程式系(11)と境界条件(14)から、無限遠での放射条件を考慮して、逐次求めることができる。

本研究では遠方場での解の振舞いと正則摂動展開との関係を調べることが目的であるので、正則摂動展開による解の r →∞における漸近形のみを求める。まず最初にϕ_1を考える。(11.a)より、無限遠での放射条件のみを考慮すると、ϕ_1は

$$\phi_1 = \sum_{k,n} [Y_n^{(k)}(\theta,\psi)\{ j_n(kr)\cos kt + n_n(kr)\sin kt \} + T_n^{(k)}(\theta,\psi)\{ n_n(kr)\cos kt - j_n(kr)\sin kt \}], \tag{15}$$

ここで、$Y_n{}^{(k)}, T_n{}^{(k)}$ は n次の球面調和関数、j_n, n_n は第一種、第二種の球ベッセル関数である。$Y_n{}^{(k)}, T_n{}^{(k)}$ を決定するためには、さらにr=R での境界条件も考慮せねばならない。球ベッセル関数の漸近形

$$j_n(r) \sim \frac{1}{r}\cos\left(r - \frac{n+1}{2}\pi\right),\quad n_n(r) \sim \frac{1}{r}\sin\left(r - \frac{n+1}{2}\pi\right) \qquad (r\to\infty), \tag{16}$$

を用いれば、(15)から、ϕ_1の漸近形を得ることができる:

$$\phi_1 \sim \sum_{k,n} \frac{1}{kr}\left[Y_n^{(k)}(\theta,\psi)\cos\left(k\varphi + \frac{n+1}{2}\pi\right) + T_n^{(k)}(\theta,\psi)\sin\left(k\varphi + \frac{n+1}{2}\pi\right)\right]$$

$$\sim \frac{R}{r} f_1^{(1)}(\varphi,\theta,\psi) \qquad (r\to\infty), \tag{17}$$

$$\varphi \equiv t - r, \tag{18}$$

ここで、$f_1{}^{(1)}$ は、無限遠での放射条件を考慮し、$r=R$ における$O(\varepsilon)$の境界条件(14.a)の下でϕ_1を厳密に求めたとき、その$1/r$ に比例する項として決定される。$f_1{}^{(1)}$ は振動数ωの基本音を表わしている[1]-[4]。

(17)を用いると、$r\to\infty$におけるϕ_2の漸近形を、以下のようにして得ることができる:(11.b)の右辺に(17)を代入し、(18)を考慮すれば

$$\Delta\phi_2 - \frac{\partial^2\phi_2}{\partial t^2} = \frac{R^2}{r^2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\gamma+1}{2}\left(\frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial t}\right)^2\right] + \left(\frac{1}{r^3},\ \frac{1}{r^4}\text{に比例する項}\right), \tag{19}$$

となる。(19)の特解が$\ln r$に比例する永年項を含むことは容易に予想される。そこで、ϕ_2の形を

$$\phi_2 = \frac{R}{r}\frac{\gamma+1}{4} R \ln\frac{r}{R} f_2^{(1)}(\varphi,\theta,\psi) + \frac{R}{r} f_2^{(2)}(\varphi,\theta,\psi) + o\left(\frac{1}{r}\right) \qquad (r\to\infty), \tag{20}$$

のように仮定する。ここで、$f_2{}^{(1)}, f_2{}^{(2)}$ は未知関数である。(20)の$\ln r$の特異性から、r が十分大きい領域では正則摂動展開(10)が破綻することがわかる[1]-[4]。(20)を(19)の左辺に代入し、両辺を比較することによって、$f_2{}^{(1)}$ を決定する関係式を得る:

$$\frac{\partial f_2^{(1)}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial t}\right)^2. \tag{21}$$

(21)では、 $r\to\infty$ で小さくなる項（$1/r$ を係数に持つ項）は無視されている。$f_2^{(2)}$ を決定するためには、$O(\varepsilon^2)$の境界条件(14.b)の下にϕ_2を厳密に求めねばならない。以上のような手続きを順次繰り返すことによって、任意のnに対して、ϕ_nの $r\to\infty$ における漸近形を得ることができる。これを組織的に行なうには、(20)から予想されるように、ϕ_nを次のように仮定し、

$$\phi_n = \frac{R}{r}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\gamma+1}{4}R\ln\frac{r}{R}\right)^{n-k} f_n^{(k)}(\varphi,\theta,\psi) + o\left(\frac{1}{r}\right) \quad (r\to\infty),\ (n=1,2,\cdots), \tag{22}$$

未知関数$f_n^{(k)}$ を決定するための関係式を導けばよい。(22)を(11.c)の右辺に代入すると、

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_{m=1}^{n-1}\frac{\gamma+1}{2}\frac{R^2}{r^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\gamma+1}{4}R\ln\frac{r}{R}\right)^{n-k-1}\frac{\partial f_m^{(j)}}{\partial t}\frac{\partial f_{n-m}^{(k+1-j)}}{\partial t} + \left(\frac{1}{r^3},\ \frac{1}{r^4}\text{に比例する項}\right), \tag{23}$$

となり、(11.c)の左辺に代入すると、

$$\frac{2R^2}{r^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\gamma+1}{4}(n-k)\left(\frac{\gamma+1}{4}R\ln\frac{r}{R}\right)^{n-k-1}\frac{\partial f_n^{(k)}}{\partial r} + \left(\frac{1}{r^3}\text{に比例する項}\right), \tag{24}$$

となる。(23)と(24)において $[(\gamma+1)R/4]\ln(r/R)$の巾乗の係数を等しいとおくことによって、結局、求める関係式

$$\frac{\partial f_n^{(k)}}{\partial t} = -\frac{1}{n-k}\frac{\partial}{\partial t}\sum_{m=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial f_m^{(j)}}{\partial t}\frac{\partial f_{n-m}^{(k+1-j)}}{\partial t} \qquad (n>k), \tag{25}$$

が得られる。ただし、$j>m$ のとき $f_m^{(j)}\equiv 0$ とする。(25)でも、(21)を得たときと同様に $r\to\infty$ で小さくなる項は無視されている。任意に与えられた$n,k(n>k)$に対して、$f_m^{(j)}(1\leq m\leq n-1, 1\leq j\leq k)$が既知であれば、漸化式(25)を用いて$f_n^{(k)}$

を計算することができる。しかしながら、$f_n^{(n)}$ は(25)から決定されない。r=R における $O(\varepsilon^n)$ の境界条件の下に ϕ_n を厳密に求めたとき、その1/r に比例する部分が $f_n^{(n)}$ である。$f_n^{(k)}(n \geq k)$ が基本音 $f_1^{(1)}$ に対する n次高調波を含んでいることは(25)より容易に理解できる。(25)は、k=1 に対しては Heaps[8]によって、k=2 に対しては Inoue et al.[1] によって得られている。

以上より、r が大きい領域（$1/r^2$を係数に持つ項を無視できるほどr が十分に大きく、かつ、衝撃波が発生する位置まで）では、ϕ 及び u_r の漸近形が、

$$\phi = \frac{R}{r}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\gamma+1}{4}R\ln\frac{r}{R}\right)^{n-k}\varepsilon^n f_n^{(k)}(\varphi,\theta,\psi), \tag{26}$$

$$u_r = \frac{R}{r}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\gamma+1}{4}R\ln\frac{r}{R}\right)^{n-k}\varepsilon^n \frac{\partial f_n^{(k)}}{\partial r}, \tag{27}$$

と表わされる。

ここで、これまでの議論で得られた結果をもとに、遠方場での音波の振舞いと正則摂動展開による解の関係について予備的な考察を行なう。まず、新しい変数 z を

$$z \equiv [(\gamma+1)R/2]\ln(r/R), \tag{28}$$

と定義する。この z を用いると、(27)より、正則摂動展開によって得られた $\partial\phi_n/\partial r$ の $r\to\infty$ における漸近形を、以下のように書き下すことができる。

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{r}{R}\,\varepsilon\,\frac{\partial\phi_1}{\partial r} &= \varepsilon\,\frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial r},\\
\frac{r}{R}\,\varepsilon^2\,\frac{\partial\phi_2}{\partial r} &= \varepsilon\left(\frac{\varepsilon z}{2}\right)\frac{\partial f_2^{(1)}}{\partial r} + \varepsilon^2\,\frac{\partial f_2^{(2)}}{\partial r},\\
\frac{r}{R}\,\varepsilon^3\,\frac{\partial\phi_3}{\partial r} &= \varepsilon\left(\frac{\varepsilon z}{2}\right)^2\frac{\partial f_3^{(1)}}{\partial r} + \varepsilon^2\left(\frac{\varepsilon z}{2}\right)\frac{\partial f_3^{(2)}}{\partial r} + \varepsilon^3\,\frac{\partial f_3^{(3)}}{\partial r},\\
&\vdots\\
\frac{r}{R}\,\varepsilon^n\,\frac{\partial\phi_n}{\partial r} &= \varepsilon\left(\frac{\varepsilon z}{2}\right)^{n-1}\frac{\partial f_n^{(1)}}{\partial r} + \varepsilon^2\left(\frac{\varepsilon z}{2}\right)^{n-2}\frac{\partial f_n^{(2)}}{\partial r} + \cdots\cdots + \varepsilon^n\,\frac{\partial f_n^{(n)}}{\partial r},\\
&\vdots
\end{aligned}
\right]
\qquad (29)
$$

$\varepsilon z/2 \sim 1$ であるような遠方場（衝撃波が発生するのはこのような領域である[1]-[6][8]）において、(29)の右辺の左から k 番目の列に含まれる全ての項の大きさは $O(\varepsilon^k)$ になることが予想される。従って、r が十分に大きい領域では、無限個の項を考慮せねばならない。一方、u_r の漸近形の形式的な級数表現(27)において、n についての和と k についての和の順序交換を行なうと

$$
u_r = \frac{R}{r}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\varepsilon^k\sum_{n=1}^{\infty}\left(\varepsilon\,\frac{\gamma+1}{4}\,R\,\ln\frac{r}{R}\right)^{n-k}\frac{\partial f_n^{(k)}}{\partial r}(\varphi,\theta,\psi)\right], \qquad (30)
$$

となる。(29)の右辺第 k 列を縦に総和したものは、(30)の右辺のかぎかっこの部分に一致している。従って、遠方場では、ε による u_r の展開における第 k 項として、(29)の右辺第 k 列を縦に総和したものを採用すべきであると考えられる。このことは、正則摂動展開による解の漸近形を適当に再配列すれ

ば、球の運動によって放射される音波の遠方場における振舞いを記述する適切な表現が得られることを示唆している。

遠方場におけるu_rの第一近似解、すなわち、(29)の右辺第一列（遠方場で$O(\varepsilon)$となる項）だけを総和したものが遠方場の方程式を満たすことは、既にInoue et al.[1] によって示されている。次節以降で(29)の右辺全体と遠方場の方程式の関係について調べる。

4. 遠方場の方程式

$f_n^{(k)}$ を決定する漸化式(25)において(18)を考慮すると、

$$\frac{\partial}{\partial\varphi} f_n^{(k)} = -\frac{1}{n-k}\frac{\partial}{\partial\varphi}\sum_{m=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial f_m^{(j)}}{\partial\varphi}\frac{\partial f_{n-m}^{(k+1-j)}}{\partial\varphi} \qquad (n>k), \tag{31}$$

$$f_m^{(j)} \equiv 0 \qquad (j>m), \tag{32}$$

となる。(31)の両辺に$\varepsilon^n(z/2)^{n-k}$をかけると

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\varepsilon^n\left(\frac{z}{2}\right)^{n-k} f_n^{(k)} = -\frac{1}{n-k}\left(\frac{z}{2}\right)^{n-k}\frac{\partial}{\partial\varphi}\sum_{m=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{k}\varepsilon^m\frac{\partial f_m^{(j)}}{\partial\varphi}\varepsilon^{n-m}\frac{\partial f_{n-m}^{(k+1-j)}}{\partial\varphi}$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^z\left(\frac{z}{2}\right)^{n-k-1}dz\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\sum_{m=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{k}\varepsilon^m\frac{\partial f_m^{(j)}}{\partial\varphi}\varepsilon^{n-m}\frac{\partial f_{n-m}^{(k+1-j)}}{\partial\varphi}. \tag{33}$$

さらに

$$F_n^{(k)}(z,\varphi,\theta,\psi) \equiv -\varepsilon^n\left(\frac{z}{2}\right)^{n-k}\frac{\partial f_n^{(k)}}{\partial\varphi}, \tag{34}$$

とおく。(34)を用いると、(33)と(32)は、それぞれ

$$F_n^{(k)} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\int_0^z\sum_{m=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{k}F_m^{(j)}\,F_{n-m}^{(k+1-j)}dz \qquad (n>k), \tag{35}$$

$$F_m^{(j)} \equiv 0 \qquad (j > m), \tag{36}$$

となる。

(35)をnについてk+1から∞までたしあわせる:

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} F_n^{(k)} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\int_0^z \sum_{n=k+1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{k} F_m^{(j)}\ F_{n-m}^{(k+1-j)} dz$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\int_0^z \sum_{j=1}^{k}\left[\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{n-1} - \sum_{n=2}^{k}\sum_{m=1}^{n-1}\right] F_m^{(j)}\ F_{n-m}^{(k+1-j)} dz\ . \tag{37}$$

(36)を考慮すると、(37)の最右辺のかぎかっこの中の第二項についての和は0となる。従って、

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} F_n^{(k)} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\int_0^z \sum_{j=1}^{k}\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{n-1} F_m^{(j)}\ F_{n-m}^{(k+1-j)} dz\ , \tag{38}$$

を得る。両辺に $F_k^{(k)}$ を加え、再び(36)を考慮すれば、

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n^{(k)} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\int_0^z \sum_{j=1}^{k}\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{n-1} F_m^{(j)}\ F_{n-m}^{(k+1-j)} dz + F_k^{(k)}\ . \tag{39}$$

一般に、絶対収束する二つの級数 ΣA_n、ΣB_n に対して

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sum_{n=1}^{\infty} B_n = \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{n-1} A_m\ B_{n-m}, \tag{40}$$

が成立する。いま、

$$\omega_k(z,\varphi,\theta,\psi) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} F_n^{(k)} \qquad (k = 1,2,\cdots), \tag{41}$$

で定義される ω_k が絶対収束すると仮定すると、(40)を用いて(39)を

$$\omega_k = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\int_0^z \sum_{j=1}^{k} \omega_j\ \omega_{k+1-j}\ dz + F_k^{(k)}, \tag{42}$$

と表わすことができる。明らかに、ω_k は、(29)の右辺第k列を縦に総和したもの((30)のかぎかっこの部分)であり、r

が十分に大きい領域ではその大きさは $O(\varepsilon^k)$ になる。

さらに(42)を k について総和する:

$$\sum_{k=1}^{\infty} w_k = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\int_0^z \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k} w_j\, w_{k+1-j}\, dz + \sum_{k=1}^{\infty} F_k^{(k)}. \tag{43}$$

新しい変数 w を

$$w(z,\varphi,\theta,\psi) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} w_k , \tag{44}$$

と定義する。(43)に(40)と(44)を用いると、

$$w(z,\varphi,\theta,\psi) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\int_0^z \left(w(z,\varphi,\theta,\psi)\right)^2 dz + w(0,\varphi,\theta,\psi), \tag{45}$$

となる。(45)の両辺を z で微分することによって、遠方場の方程式(1)が得られる。一方、(34)と(41)より、w をもとの変数で表わせば、

$$w = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\gamma+1}{4} R \ln\frac{r}{R}\right)^{n-k} \varepsilon^n \frac{\partial f_n^{(k)}}{\partial r} . \tag{46}$$

(46)より、u_r を(27)で近似できるような遠方場では、

$$u_r = \frac{R}{r} w , \tag{47}$$

となっている。また、$z=0$ では、

$$w(0,\varphi,\theta,\psi) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k^{(k)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \frac{\partial f_n^{(n)}}{\partial\varphi}(\varphi,\theta,\psi), \tag{48}$$

である。

結局、(29)の右辺に現われる全ての項の和($=ru_r/R$)は、境界条件(48)を満たす遠方場の方程式(1)の解であることがわかった。しかし、ϕ_n は近傍場において逐次決定されるものであるから、一般に、正則摂動展開を用いて全ての $f_n^{(n)}$、す

なわち（1)に対する境界条件$w(0,\varphi,\theta,\psi)$、を求めることは不可能である。

（43)において、kについての和を有限のNで打ち切る。これは、（29)の右辺の左から第N列（遠方場で$O(\varepsilon^N)$となる項）までを考慮することを意味している。

$$\sum_{k=1}^{N} w_k = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\int_0^z \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{k} w_j\, w_{k+1-j}\, dz + \sum_{k=1}^{N} F_k^{(k)}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\int_0^z \left(\sum_{k=1}^{N} w_k\right)^2 dz + \sum_{k=1}^{N} F_k^{(k)}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\int_0^z \sum_{k=2}^{N}\sum_{j=N-k+2}^{N}\varepsilon^{k+j}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\varepsilon z}{2}\right)^{n-j}\frac{\partial f_n^{(j)}}{\partial\varphi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\varepsilon z}{2}\right)^{n-k-1+j}\frac{\partial f_n^{(k+1-j)}}{\partial\varphi}\, dz\,. \tag{49}$$

ここで、あらためて、wを

$$w(z,\varphi,\theta,\psi) \equiv \sum_{k=1}^{N} w_k\,, \tag{50}$$

と定義し直すと、$\varepsilon z/2 \sim 1$が成り立つような遠方場で、

$$\frac{\partial w}{\partial z} - w\frac{\partial w}{\partial\varphi} = O(\varepsilon^{N+2}), \tag{51}$$

が得られる。従って、遠方場において$O(\varepsilon^N)$までを考慮した近似解も、その近似の範囲内で、遠方場の方程式(1）を満たしている。このとき、対応する境界条件は

$$w(0,\varphi,\theta,\psi) = -\sum_{n=1}^{N}\varepsilon^n\frac{\partial f_n^{(n)}}{\partial\varphi}\,, \tag{52}$$

となる。Inoue et al.は[1]で、一様に脈動する球の問題を考察し、N＝1（遠方場における第一近似解）に対して、同様の方法を用いて(51)を導いている。

5. 遠方場の解と衝撃波の発生位置

5.1 遠方場の解

遠方場の方程式(1)の境界条件(52)に対する厳密解は容易に得ることができる:

$$w(z,\varphi,\theta,\psi) = -\sum_{n=1}^{N} \varepsilon^n \frac{\partial f_n^{(n)}}{\partial \varphi}(\hat{\varphi},\theta,\psi), \tag{53}$$

$$\hat{\varphi} = \varphi + z\,w, \tag{54}$$

ここで、$f_n^{(n)}$ $(1 \leq n \leq N)$は、無限遠での放射条件を考慮して、正則摂動展開による解を$r=R$ における境界条件の下に$O(\varepsilon^N)$まで厳密に求めたとき、その $1/r$に比例する部分として決定される。また、$\varphi+zw=$一定、は(1)の特性曲線である。遠方場の解(53),(54)は次のような特徴を持つ:遠方場の解の関数形は$f_n^{(n)}$ $(1 \leq n \leq N)$のみによって決まる。球の運動に関する情報は$f_n^{(n)}$の関数形を通して遠方場へ伝わると考えられる。音波の伝播に伴う非線形効果のために、位相φが$\hat{\varphi}$に置き換えられている[1][2][3]。

5.2 衝撃波の発生位置

遠方場の方程式(1)の解は、よく知られているように、音波の伝播に伴い徐々に歪み、ついには多価となり物理的な意味を失う。非粘性・非熱伝導性流体の理論では、波形の勾配が初めて無限大となる点r_sが衝撃波の発生位置である。r_sよ

り遠方では、多価の部分に衝撃波として不連続面を挿入することによって物理的な意味を取り戻すことが可能である[3]。

ω の φ に対する勾配は次の式で与えられる。

$$\frac{\partial \omega}{\partial \varphi} = \frac{\partial \omega}{\partial \hat{\varphi}} \Big/ \left[1 - z \frac{\partial \omega}{\partial \hat{\varphi}} \right]. \tag{55}$$

衝撃波の発生位置 r_s に対応する z_s は $\partial\omega/\partial\varphi$ がはじめて無限大になる z である。すなわち、

$$z_s = 1 \Big/ \max_{\hat{\varphi}} \left[\frac{\partial \omega}{\partial \hat{\varphi}} \right] = 1 \Big/ \max_{\varphi} \left[- \sum_{n=1}^{N} \varepsilon^n \frac{\partial^2 f_n^{(n)}}{\partial \varphi^2} (\varphi, \theta, \psi) \right]. \tag{56}$$

このとき r_s は、(28)より z_s を用いて

$$r_s = R \exp \left[\frac{2 z_s}{(\gamma+1) R} \right], \tag{57}$$

と表わされる[1][2][3]。

6. 結果及び検討

正則摂動展開による解の $r \to \infty$ における漸近形に現われる全ての項((29)の右辺の全ての項)の和に対して、行に関する和を列に関する和に直す再配列を行なうことによって、その和を、遠方場での適切な表現、すなわち、$z=0$ における境界条件 $\omega(0, \varphi, \theta, \psi)$ を満たす遠方場の方程式(1)の解として表わすことができた。列に関する和を有限のNで打ち切った場合(第N近似解)も、$O(\varepsilon^N)$ の精度で、その和は、$z=0$ における境界条件(52)を満たす遠方場の方程式(1)の解となる。

逆に、もし、なんらかの方法で境界条件 $\omega(0, \varphi, \theta, \psi)$ が得ら

れれば、これを満たす遠方場の方程式の厳密解を求めることによって、遠方場の解が得られる。そのとき、この解は確定した球の運動によって放射される音波の遠方場での振舞いを正しく記述している。特に、第N近似解の場合には、正則摂動展開を用いて、実際に$z=0$における境界条件(52)を構成することができる。

遠方場では、近似の精度を高めても、支配方程式は変わらず、新しい非線形効果は現われない。遠方場の方程式が角度座標に関する微分項を持たないことから、近似をいくら高めても角度依存性に対する非線形効果は現われない。

本研究では、遠方場の第N近似解を考えるとき、ε^N/rを考慮してε/r^2を無視している((29)参照)。与えられたマッハ数 $\varepsilon \ll 1$ に対して、この近似が適切であるためには、

$$r \gg \varepsilon^{1-N}, \tag{58}$$

が成立するくらい遠方でなければならない。ところが、rは衝撃波の発生位置を越えることはできないから、

$$r \leq r_s, \tag{59}$$

でなければならない。従って、本研究の議論が有効であるためには

$$r_s \gg \varepsilon^{1-N}, \tag{60}$$

の条件が必要である。(56)と(57)からr_sを粗く見積ると、

$$r_s \sim \exp(1/\varepsilon), \tag{61}$$

である。（なぜなら $R \sim 1, \gamma \sim 1, f_n^{(n)} \sim 1.$）

任意のNに対して、 $\varepsilon \to 0$ のとき、

$$\exp(1/\varepsilon) \gg (1/\varepsilon)^N, \tag{62}$$

であるから、

$$r_s \gg \varepsilon^{-N} \qquad (\varepsilon \to 0), \tag{63}$$

となる。ゆえに、 ε を十分に小さくとれば条件(60)は満たされる。

最後に、無限に長い円柱の脈動あるいは振動のような運動によって放射される弱非線形音波（円柱波）に対しても、同様の解析が可能であるが、詳細は省略する。

References

1. Y.Inoue, S.Ishii and T.Okigami : J. Sound Vib. 106 (1986) 257.
2. Y.Inoue and T.Okigami : J. Sound Vib. 118 (1987) 199.
3. Y.Inoue, T.Yano and H.Tsujimura : F. D. R. (1988) (in press).
4. S.G.Kelly and A.H.Nayfeh : J. Sound Vib. 72 (1980) 25.
5. K.A.Naugol'nykh, S.I.Soluyan and R.V.Khokholov : Soviet Phys. Acoust. 9 (1963) 42.
6. D.T.Blackstock : J. Acoust. Soc. Amer. 36 (1964) 217.
7. R.T.Beyer : J. Acoust. Soc. Amer. 32 (1960) 719.
8. H.S.Heaps : J. Acoust. Soc. Amer. 34 (1962) 355.